

**ЭФФЕКТ АНИЗОТРОПНОЙ ПЕРЕДАЧИ
ИМПУЛЬСА ФОТОНА ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЕ
В ДВУМЕРНОЙ ЛЕНТЕ, СВЕРНУТОЙ В СПИРАЛЬ,
В УСЛОВИЯХ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Аннотация. Теоретически исследуются особенности эффекта фотонного увлечения в двумерной ленте, свернутой в спираль, связанные с асимметричным энергетическим спектром электронов в продольном магнитном поле. Выявлен эффект анизотропной передачи импульса фотона электронной системе в спектральной зависимости плотности тока фотонного увлечения.

Ключевые слова: двумерная лента, свернутая в спираль, продольное магнитное поле, эффект анизотропной передачи импульса, эффект фотонного увлечения.

Abstract. Theoretically, we study the effect of particular photon drag in a two-dimensional ribbon rolled into a spiral associated with asymmetrical energy spectrum of electrons in a longitudinal magnetic field. The effect of anisotropic transfer of photon momentum to the electronic system in the spectral dependence of the current density of photon drag.

Keywords: two dimensional ribbon, rolled into a spiral, longitudinal magnetic field, the effect of anisotropic momentum transfer, the effect of photon drag.

Введение

В последние годы интенсивно исследуются физические свойства электронного газа на искривленной поверхности в таких моделях, как квантовый цилиндр [1–3], квантовая сфера [4, 5], нанотрубки различной геометрии [6–9]. Особый интерес привлекают к себе низкоразмерные структуры с одновременным нарушением пространственной симметрии относительно инверсии координат и фундаментальной симметрии относительно обращения времени [9]. Этот интерес обусловлен асимметричным энергетическим спектром электронов [9], электронные свойства таких структур оказываются различными для взаимно противоположных направлений волнового вектора электрона, что может приводить к целому ряду принципиально новых физических явлений [10–15]. Асимметричный энергетический спектр имеет и двумерная лента (ДЛ), свернутая в спираль в условиях внешнего магнитного поля [16]. Целью настоящей работы является теоретическое исследование особенностей эффекта фотонного увлечения (ЭФУ) электронов в ДЛ, свернутой в спираль при внутризонных оптических переходах в продольном магнитном поле.

Расчет матричного элемента внутризонного оптического перехода в двумерной ленте, свернутой в спираль

Рассмотрим оптические переходы электронов из основного состояния ($m = 1, m = 1, 2, \dots$ – квантовое число), которое нумерует энергетические подзоны, в состояния размерно-квантованного спектра ДЛ.

Волновые функции начального $\Psi_{k1}(z, \varphi)$ и конечного $\Psi_{k'm'}(z, \varphi)$ состояний и энергетический спектр определяются соотношениями вида [16]:

$$\Psi_{k1}(z, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi T_z}} \exp\left(i k z + i \frac{S}{2} \Phi\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\varphi - \alpha z)\right); \quad (1)$$

$$\Psi_{k'm'}(z, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi T_z}} \exp\left(i k' z + i \frac{S'}{2} \Phi\right) \sin\left(\frac{m'}{2}(\varphi - \alpha z)\right); \quad (2)$$

$$E(k, m) = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m^*} \left[\frac{1}{1 + \alpha^2 R_0^2} \left(\frac{k}{\alpha} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \left(1 + \alpha^2 R_0^2 \right) \frac{m^2}{4\alpha^2 R_0^2} \right], \quad (3)$$

где $S = 2(\alpha R_0^2 k - \Phi/\Phi_0)/(1 + \alpha^2 R_0^2)$, $S' = 2(\alpha R_0^2 k' - \Phi/\Phi_0)/(1 + \alpha^2 R_0^2)$, Φ – магнитный поток через поперечное сечение спиральной ленты; Φ_0 – квант магнитного потока; $\phi = \varphi - \alpha z - 2\pi M$; M – целое число такое, что $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Число α определяется периодом спирали по оси цилиндра $T_z = 2\pi/\alpha$, k – собственное значение оператора \mathbf{K} , являющегося линейной комбинацией оператора импульса \mathbf{P}_z и момента импульса \mathbf{L}_z : $\mathbf{K} = \mathbf{P}_z + \alpha \mathbf{L}_z$; R_0 – радиус спирали.

Матричный элемент внутризонного оптического перехода запишется в виде

$$M = \langle \Psi_{k'm'}^*(z, \varphi) | \mathbf{H}_{\text{int}} | \Psi_{k1}(z, \varphi) \rangle, \quad (4)$$

где гамильтониан взаимодействия с полем световой волны \mathbf{H}_{int} имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = -i\hbar^2 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^*}{m^{*2}\omega}} I_0 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} (\mathbf{e}_\lambda \nabla_{\mathbf{r}}). \quad (5)$$

Расчет матричного элемента в (4) необходимо выполнить в квадрупольном приближении, при этом рассматривается случай, когда вектор импульса световой волны \mathbf{q} направлен под углом θ к оси ДЛ $\left(e^{iq(z \cos \theta - R_0 \sin \theta \cos \phi)} = 1 + iq(z \cos \theta - R_0 \sin \theta \cos \phi)\right)$, тогда матричный элемент оптического перехода можно представить как

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= -i\hbar^2 \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{m^{*2}\omega R_0^2}} \frac{1}{\pi T_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp\left(-ik' z - i \frac{(\alpha R_0^2 k' - \Phi/\Phi_0)}{(1 + \alpha^2 R_0^2)} (\varphi - \alpha z - 2\pi M)\right) \times \\ &\quad \times \sin\left(\frac{m'}{2}(\varphi - \alpha z)\right) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\cos \theta}{R_0} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \sin\left(\frac{1}{2}(\varphi - \alpha z)\right) \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left(ikz + i \frac{(\alpha R_0^2 k - \Phi/\Phi_0)}{(1 + \alpha^2 R_0^2)} (\varphi - \alpha z - 2\pi M) \right) dz d\varphi; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M^{(2)} = & \hbar^2 \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{m^* \omega R_0^2}} \frac{q}{\pi T_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} z \cos \theta \sin \left(\frac{m'}{2} (\varphi - \alpha z) \right) \times \\ & \times \exp \left(-ik' z - i \frac{(\alpha R_0^2 k' - \Phi/\Phi_0)}{(1 + \alpha^2 R_0^2)} (\varphi - \alpha z - 2\pi M) \right) \times \\ & \times \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\cos \theta}{R_0} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \exp \left(ikz + i \frac{(\alpha R_0^2 k - \Phi/\Phi_0)}{(1 + \alpha^2 R_0^2)} (\varphi - \alpha z - 2\pi M) \right) \times \\ & \times \sin \left(\frac{1}{2} (\varphi - \alpha z) \right) dz d\varphi; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} M^{(3)} = & -\hbar^2 \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{m^* \omega R_0^2}} \frac{q R_0}{\pi T_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \varphi \sin \left(\frac{m'}{2} (\varphi - \alpha z) \right) \times \\ & \times \exp \left(-ik' z - i \frac{(\alpha R_0^2 k' - \Phi/\Phi_0)}{(1 + \alpha^2 R_0^2)} (\varphi - \alpha z - 2\pi M) \right) \times \\ & \times \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\cos \theta}{R_0} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \exp \left(ikz + i \frac{(\alpha R_0^2 k - \Phi/\Phi_0)}{(1 + \alpha^2 R_0^2)} (\varphi - \alpha z - 2\pi M) \right) \times \\ & \times \sin \left(\frac{1}{2} (\varphi - \alpha z) \right) dz d\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

После вычисления производных в выражениях (7)–(9) получим

$$\begin{aligned} M^{(1)} = & -i\hbar^2 \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{m^* \omega R_0^2}} \frac{1}{\pi T_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp \left(-i(k - k')z - i \frac{\alpha R_0^2 (k - k')}{1 + \alpha^2 R_0^2} (\varphi - \alpha z - 2\pi M) \right) \times \\ & \times \sin \left(\frac{m'}{2} (\varphi - \alpha z) \right) \left[i \left(\sin \theta \frac{k + \alpha \frac{\Phi}{\Phi_0}}{1 + \alpha^2 R_0^2} - \cos \theta \sin \varphi \frac{\alpha R_0^2 k - \frac{\Phi}{\Phi_0}}{R_0 (1 + \alpha^2 R_0^2)} \right) \sin \left(\frac{1}{2} (\varphi - \alpha z) \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\alpha}{2} \sin \theta + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{2 R_0} \right) \cos \left(\frac{1}{2} (\varphi - \alpha z) \right) \right] d\varphi dz; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 M^{(2)} = & \hbar^2 \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{m^{*2} \omega R_0^2}} \frac{q \cos \theta}{\pi T_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} z \sin\left(\frac{m'}{2}(\varphi - \alpha z)\right) \times \\
 & \times \exp\left(-i(k - k')z - i \frac{\alpha R_0^2 (k - k')}{1 + \alpha^2 R_0^2} (\varphi - \alpha z - 2\pi M)\right) \times \\
 & \times \left[i \left(\sin \theta \frac{k + \alpha \frac{\Phi}{\Phi_0}}{1 + \alpha^2 R_0^2} - \cos \theta \sin \varphi \frac{\alpha R_0^2 k - \frac{\Phi}{\Phi_0}}{R_0 (1 + \alpha^2 R_0^2)} \right) \sin\left(\frac{1}{2}(\varphi - \alpha z)\right) - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\alpha}{2} \sin \theta + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{2R_0} \right) \cos\left(\frac{1}{2}(\varphi - \alpha z)\right) \right] d\varphi dz; \tag{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^{(3)} = & -\hbar^2 \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{m^{*2} \omega R_0^2}} \frac{q R_0 \sin \theta}{\pi T_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin\left(\frac{m'}{2}(\varphi - \alpha z)\right) \times \\
 & \times \exp\left(-i(k - k')z - i \frac{\alpha R_0^2 (k - k')}{1 + \alpha^2 R_0^2} (\varphi - \alpha z - 2\pi M)\right) \times \\
 & \times \left[i \left(\sin \theta \frac{k + \alpha \frac{\Phi}{\Phi_0}}{1 + \alpha^2 R_0^2} - \cos \theta \sin \varphi \frac{\alpha R_0^2 k - \frac{\Phi}{\Phi_0}}{R_0 (1 + \alpha^2 R_0^2)} \right) \sin\left(\frac{1}{2}(\varphi - \alpha z)\right) - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\alpha}{2} \sin \theta + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{2R_0} \right) \cos\left(\frac{1}{2}(\varphi - \alpha z)\right) \right] d\varphi dz. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Квадрат модуля матричного элемента, рассчитанного в линейном по импульсу фотона приближении, можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 |M^{(q)}|^2 = & -16 \cdot \frac{\hbar^4 \lambda_0^2 \alpha^* I_0}{m^{*2} \omega} \cdot \frac{q}{a_d R_0^* T_z^{*2}} \times \\
 & \times \left[\frac{\sin^3 \theta \left(k + \alpha \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2}{\left(1 + \alpha^2 a_d^2 R_0^{*2} \right)^2} \left(\operatorname{Re}(\tilde{I}_1) \operatorname{Re}(\tilde{I}_5) + \operatorname{Im}(\tilde{I}_1) \operatorname{Im}(\tilde{I}_5) \right) + \right. \\
 & + \left. \frac{\sin \theta \cos^2 \theta \left(\alpha a_d^2 R_0^{*2} k - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2}{a_d^2 R_0^{*2} \left(1 + \alpha^2 a_d^2 R_0^{*2} \right)^2} \times \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\operatorname{Re}(\tilde{I}_2) \operatorname{Re}(\tilde{I}_6) + \operatorname{Im}(\tilde{I}_2) \operatorname{Im}(\tilde{I}_6) \right) - \frac{\alpha^2 \sin^3 \theta}{4} \left(\operatorname{Re}(\tilde{I}_7) \operatorname{Re}(\tilde{I}_3) + \operatorname{Im}(\tilde{I}_7) \operatorname{Im}(\tilde{I}_3) \right) - \\ & - \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{4a_d^2 R_0^{*2}} \left(\operatorname{Re}(\tilde{I}_8) \operatorname{Re}(\tilde{I}_4) + \operatorname{Im}(\tilde{I}_8) \operatorname{Im}(\tilde{I}_4) \right) \Big]. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения для I_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) довольно громоздкие, по этой причине мы их не приводим.

Плотность тока фотонного увлечения электронов

Эффект фотонного увлечения обусловлен импульсом фотонов, передаваемым в процессе поглощения электронной подсистемы. Учет импульса света приводит к асимметрии в распределении носителей заряда в пространстве квазимпульса, т.е. к образованию тока увлечения (ТУ). Решение задачи о ЭФУ в ДЛ, свернутой в спираль, основано на кинетическом уравнении Больцмана, записанном в приближении времени релаксации. Генерационный член этого уравнения определяется квантовыми фотопереходами электронов из состояния с $m = 1$ в размерно-квантованные подзоны, которые рассчитываются в линейном по импульсу фотона приближении.

В рассматриваемой нами модели ДЛ импульс \mathbf{q} фотона направлен к оси ДЛ под углом θ :

$$\cos \theta = \frac{T_z^*}{\sqrt{(2\pi R_0^*)^2 + T_z^{*2}}}. \quad (14)$$

Поскольку в магнитном поле электронные подзоны $E(k)$ асимметричны для направлений k и $-k$, то матричный элемент (20) оказывается различным для процессов поглощения фотонов с векторами q и $-q$, благодаря чему плотности ТУ также оказываются различными, т.е. $j^{(+)}(q) \neq j^{(-)}(-q)$, где

$$\begin{aligned} j^{(+)}(\omega) = & -\frac{|e|}{2\pi^2 \hbar^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \Theta[\hbar\omega - E(k', m') + E(k, 1)] \frac{\partial E(k', m')}{\partial k'} \tau(q_l) \times \\ & \times \left| M^{(q>0)} \right|^2 [f_0(E(k, 1)) - f_0(E(k', m'))] \delta(\hbar\omega - E(k, 1) + E(k', m')) dk dk'; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} j^{(-)}(\omega) = & -\frac{|e|}{2\pi^2 \hbar^2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \sum_{m'=1}^{\infty} \Theta[\hbar\omega - E(k', m') + E(k, 1)] \frac{\partial E(k', m')}{\partial k'} \tau(-q_l) \times \\ & \times \left| M^{(q<0)} \right|^2 [f_0(E(k, 1)) - f_0(E(k', m'))] \delta(\hbar\omega - E(k, 1) + E(k', m')) dk dk', \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Theta(x)$ – единичная функция Хевисайда; $\hbar\omega$ – энергия фотона; $f_0(E)$ – квазиравновесная функция распределения электронов по энергии в ДЛ;

$\tau(q_l)$ – время релаксации при рассеянии электронов на продольных акустических фонах, определяемое выражением вида [7]

$$\tau(q_l) = \frac{\hbar^2 v_l M N}{4 \Xi^2 m^* \left(1 - \frac{4\pi a m^* v_l}{\hbar N_0} \cdot \frac{q_l}{|q_l|} \cdot \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) f_{BE}(q_l)}, \quad (17)$$

где Ξ – константа деформационного потенциала ДЛ; $f_{BE}(q_l)$ – функция распределения Бозе – Эйнштейна в состоянии с волновым числом q_l ; m^* – эффективная масса электрона; N_0 – число атомов в одном витке; v_l – скорость продольной акустической волны; M – масса атома.

Ввиду значительной громоздкости окончательных выражений для $j^{(\pm)}(\omega)$ мы ограничились приведением спектральной зависимости плотности ТУ в ДЛ на основе *InSb*, свернутой в спираль (рис. 1), для двух направлений k и $-k$ соответственно кривые 2, 2' и 1, 1'.

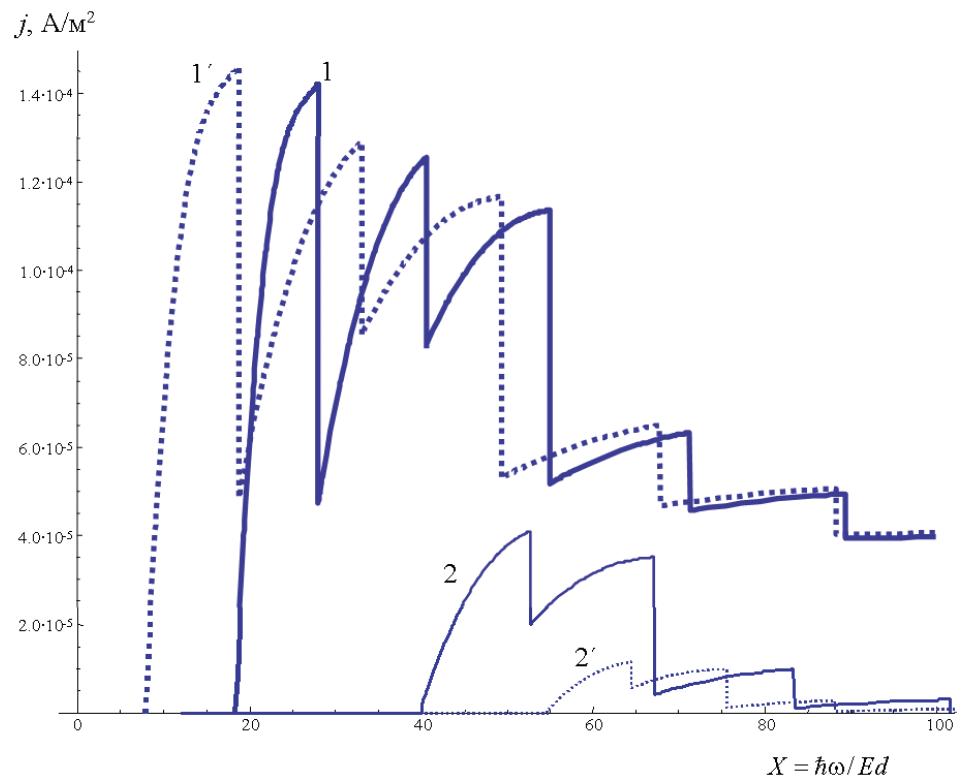


Рис. 1. Спектральная зависимость плотности ТУ в ДЛ, свернутой в спираль

при $R_0 = 20$ нм, $T_z = 150$ нм для различных значений величины B :

1 – $k < 0$, $B = 5$ Тл; 1' – $k < 0$, $B = 10$ Тл; 2 – $k > 0$, $B = 5$ Тл; 2' – $k > 0$, $B = 10$ Тл

Можно видеть, что в магнитном поле возникает анизотропная передача импульса фотона электронам ДЛ. Анизотропная передача импульса проявляется в спектральной зависимости плотности ТУ в существенном сдвиге поро-

га ЭФУ и уменьшении величины плотности ТУ примерно на порядок (сравн. кривые 1 и 2 на рис. 1). Осцилляции в спектральной зависимости плотности ТУ обусловлены оптическими переходами электронов между уровнями размernого квантования ДЛ. Таким образом, в структурах с асимметричным энергетическим спектром открываются широкие возможности для управления электронным транспортом, связанным с ЭФУ электронов, что важно для различных приложений в функциональной наноэлектронике.

Список литературы

1. **Кулик, И. О.** Квантование магнитного потока в диэлектриках / И. О. Кулик // Письма в ЖЭТФ. – 1970. – Т. 11. – С. 407.
2. **Магарилл, Л. И.** Баллистический транспорт двумерных электронов на цилиндрической поверхности / Л. И. Магарилл, Д. А. Романов, А. В. Чаплик // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 113. – С. 1411.
3. **Margulis, V. A.** Electron transport on a cylindrical surface with one-dimensional leads / V. A. Margulis, M. A. Pyataev // Phys. Rev. B. – 2005. – V. 72. – P. 75312.
4. **Aristov, D. N.** Metallic nanosphere in a magnetic field: An exact solution / D. N. Aristov // Phys. Rev. B. – 1999. – V. 59. – P. 6368.
5. **Brüning, J.** Ballistic conductance of a quantum sphere / J. Brüning, V. A. Geyler, V. A. Margulis, M. A. Pyataev // J. Phys. A. Math. Gen. – 2002. – V. 35. – P. 4239.
6. **Roche, S.** Aharonov-Bohm spectral features and coherence lengths in carbon nanotubes / S. Roche, G. Dresselhaus, M. S. Dresselhaus, R. Saito // Phys. Rev. B. – 2000. – V. 62. – P. 16092.
7. **Кибис, О. В.** Особенности электрон-фононного взаимодействия в нанотрубках с хиральной симметрией в магнитном поле / О. В. Кибис // ФТТ. – 2001. – Т. 43. – С. 2237.
8. **Осадчий, В. М.** Разделение носителей заряда в свернутых гетероструктурах / В. М. Осадчий, В. Я. Принц // Письма в ЖЭТФ. – 2000. – Т. 72. – С. 451.
9. **Гейлер, В. А.** Плотность состояний для углеродных нанотрубок в однородном магнитном поле / В. А. Гейлер, О. Г. Костров, В. А. Маргулис // ФТТ. – 2002. – Т. 44. – С. 449.
10. **Горбацевич, А. А.** Асимметричныеnanoструктуры в магнитном поле / А. А. Горбацевич, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев // Письма в ЖЭТФ. – 1993. – № 9. – Т. 57. – С. 565.
11. **Алещенко, Ю. А.** Индуцированный магнитным полем фотогальванический эффект в асимметричной системе квантовых ям / Ю. А. Алещенко [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 1993 – № 5. – Т. 58. – С. 377.
12. **Омельяновский, О. Е.** Фотогальванический эффект в асимметричной системе трех квантовых ям в сильном магнитном поле / О. Е. Омельяновский, В. И. Цебро, В. И. Кадушкин // Письма в ЖЭТФ. – 1996. – № 3. – Т. 63. – С. 197.
13. **Горбацевич, А. А.** Асимметричное по полу поперечное магнитосопротивление в немагнитной квантоворазмерной структуре / А. А. Горбацевич [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 1998. – № 5. – Т. 68. – С. 380.
14. **Кибис, О. В.** Эффект анизотропной передачи импульса в низкоразмерных электронных системах в магнитном поле / О. В. Кибис // Письма в ЖЭТФ. – 1997. – № 8. – Т. 66. – С. 551.
15. **Kibis, O. V.** Possible new quantum macroscopic effect in low-dimensional structures: The appearance of an electromotive force in a standing acoustic wave / O. V. Kibis // Phys. lett. – 1998. – V. A 237. – P. 292.
16. **Григорьевин, А. А.** Электронный спектр и баллистический транспорт спиральной нанотрубки / А. А. Григорьевин, С. М. Дунаевский // ФТТ. – 2007. – № 3. – Т. 49. – С. 557.

Кревчик Владимир Дмитриевич
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Krevchik Vladimir Dmitrievich
Doctor of physico-mathematical sciences,
professor, head of physics sub-department,
Penza State University

Разумов Алексей Викторович
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра общей физики,
Пензенский государственный
педагогический университет
им. В. Г. Белинского

E-mail: razumov_alex@mail.ru

Razumov Aleksey Viktorovich
Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of general physics,
Penza State Pedagogical University
named after V. G. Belinsky

Гришанова Валерия Александровна
старший преподаватель, кафедра физики,
Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Grishanova Valeriya Alexandrovna
Senior lecturer, sub-department of physics,
Penza State University

УДК 621.315.592

Кревчик, В. Д.

Эффект анизотропной передачи импульса фотона электронной системы в двумерной ленте, свернутой в спираль, в условиях внешнего магнитного поля / В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, В. А. Гришанова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 101–108.